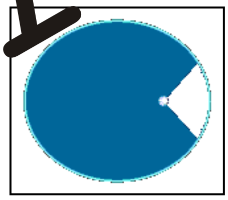
A Kepler-törvények

Kepler a XVII. század elején (1609, 1619) tapasztalati úton állította fel a bolygók mozgásának később róla elnevezett törvényeit. E törvények jelentősége, hogy Newton segítségükkel ismerte fel az általános tömegvonzás törvényét. Newton ennek alapján fogalmazta meg a kéttest-problémát, s vezette le annak megoldását. Nézzük meg, hogy a kéttest-probléma megoldása hogyan adja vissza a Kepler-törvényeket!

1. Kepler-törvény: a bolygók a Nap körül ellipszispályákon keringenek, melyek egyik fókuszában a Nap helyezkedik el.

A kéttest-probléma megoldása ennél általánosabb: ha az impulzusmomentum (*c*) nem nulla, a mozgás pályája az energiától (*h*) függően ellipszis, parabola vagy hiperbola lehet. A bolygók esetében az energia negatív, így a bolygók pályája ellipszis alakú (a perturbációktól eltekintve). Az üstökösök és az űrszondák azonban parabola és hiperbola alakú pályákon is mozoghatnak (pályájuk egyes szakaszain). A kéttest-probléma parabolikus megoldásának ismeretében tudta Newton helyesen értelmezni az üstökösök mozgását. Egy 1680-ban feltűnt, kivételesen nagy és fényes üstökösről kimutatta, hogy parabolapályán mozgott.

2. Kepler-törvény: a bolygók vezérsugara (a bolygókat a Nappal összekötő szakasz) az idővel arányos területeket súrol.



Másképp megfogalmazva, a felületi sebesség állandó. Az *ω* állandóságából következő $r^2u \quad r^2v \quad c$ összefüggés éppen ezt mondja ki, hiszen $\frac{1}{2}r \quad rv$ a felületi sebesség. A *c* állandót a tömegegységre vonatkozó impulzusmomentum abszolút értékeként definiáltuk, számértékét tekintve azonban *c* megegyezik a felületi sebesség kétszeresével. A 2. Kepler-törvény tehát változatlan formában kiadódik a kéttest-probléma megoldásából. E törvény jól ismert következménye, hogy a bolygók napközelben nagyobb, naptávolban kisebb sebességgel haladnak pályájuk mentén. Érdemes megemlíteni, hogy a 2. törvény alapján egyszerű geometriai számítással (integrálszámítás nélkül!) levezethető a Kepler-egyenlet, mely Kepler számára lehetővé tette a bolygók pályamenti helyzetének kiszámítását.

3. Kepler-törvény: a bolygók Naptól számított távolságainak harmadik hatványai úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei.

Az $n = \frac{2\pi}{T}$, az $n = \mu^{1/2}a^{-3/2}$ és a $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ összefüggésekből következik, hogy $\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(m_1 + m_2)$.

Ez az összefüggés többet mond, mint a 3. Kepler-törvény, ugyanis a fél nagytengelyt az átlagos naptávolságnak tekintve az összefüggés megadja a törvényben szereplő arányossági tényezőt is. Látható, hogy ez a gravitációs állandótól, és az égitestek tömegétől függ. Ha m_1 a Nap tömege, m_2 egy bolygó tömege, akkor mivel a bolygók tömege sokkal kisebb a Nap tömegénél (a legnagyobb bolygó, a Jupiter tömege ezredrésze a Napénak), az összefüggés jobb oldalán m_2 jó közelítéssel elhanyagolható m_1 mellett, így a jobb oldali állandó közelítőleg minden bolygóra ugyanaz lesz. A 3. Kepler-törvény tehát jó közelítéssel teljesül. A pontos számításoknál azonban a bolygók tömegét is figyelembe kell venni, így az égi mechanikában a 3. Kepler-törvényen a két égitest tömegét is tartalmazó összefüggést értik. Ez különösen fontos a kettőscsillagok, és a nagytömegű exobolygók esetében. A 3. Kepler-törvényt leggyakrabban az $n^2a^3 = \mu$ alakban szokás írni.

A 3. Kepler-törvény lehetőséget ad a kísérővel rendelkező égitestek tömegének meghatározására. A törvényt például egy Nap-bolygó, bolygó-hold rendszerre alkalmazva, és a páronként felírt összefüggések hányadosát képezve kapjuk, hogy $\left(\frac{a'}{a}\right)^3\left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \frac{m+m'}{m_0+m} \approx \frac{\frac{m}{m_0}}{1+\frac{m}{m_0}}$, ahol a vesszőtlen mennyiségek a bolygó, a vesszős mennyiségek a bolygó holdjának adatai, m_0 a Nap tömege. A keringési idők és a fél nagytengelyek mérésével fenti összefüggésből az m/m_0 bolygó-Nap tömegarány meghatározható. Az összefüggést gyakran alkalmazták a bolygók körüli pályára állt űrszondák keringési és pályaadataiból a bolygók tömegének meghatározására. Kettős aszteroidák tömege is meghatározható az összefüggés alapján. Így határozták meg például az Ida kisbolygó tömegét a körülötte keringő kicsiny hold, a Dactyl pályaadataiból.

Az Ida kisbolygó, és kísérője a Dactyl

A 3. Kepler-törvény felhasználható a Gauss-féle gravitációs állandó égi mechanikai mértékegységekkel kifejezett értékének kiszámítására. A bolygók mozgásának tanulmányozására a hétköznapi életben használt mértékegységek nem alkalmasak. Ennek oka egyrészt az, hogy az égitestek tömege, mérete és távolságaik SI egységekkel kifejezve igen nagyok, másrészt az égitestek tömegét és koordinátáit égi mechanikai mértékegységekkel kifejezve sokkal pontosabban ismerjük, mint SI egységekben.

Az égi mechanikai mértékegységek: tömeg: a Nap tömege, idő: egy középnap, hosszúság: a csillagászati egység.

A csillagászati egység a régebbi definíció szerint egyenlő a Föld-Hold rendszer tömegközéppontja Nap körüli pályájának fél nagytengelyével. Az égi mechanikai mértékegységekkel kifejezett tömeg és távolságértékek azért pontosabbak, mert a Nap tömegéhez viszonyított tömegarányok, illetve a csillagászati egységhez viszonyított távolságarányok a megfigyelések és a mozgáselméletek alapján pontosabban meghatározhatók, mint a Nap tömege kg-ban és a csillagászati egység m-ben.

A 3. Kepler-törvényből *k* kifejezhető: $k = \frac{2\pi a^{3/2}}{T\sqrt{m_1+m_2}}$.

Ennek *k* értéke bármely bolygó adataiból kiszámítható. Legegyszerűbb a Föld-Hold rendszer Nap körüli pályáját tekinteni, mert akkor a=1, és a T keringési időt ebben az esetben ismerjük a legpontosabban. Jelölje *m* a Föld és a Hold össztömegét a Nap tömegével, mint egységgel kifejezve (m_1=1, $m_2 = m$). Ekkor a Nap-(Föld-Hold) rendszerre: $k = \frac{2\pi}{T\sqrt{1+m}}$

A XIX. század elején Gauss (1809) *k* értékét az akkor ismert T = 365,256 383 5 középnap, m = 1/354710 naptömeg értékekkel számította ki. Ezekkel a Gauss-féle gravitációs állandó *k* =0,017 202 098 95. Dimenziója: [cs.e.]$^{3/2}$ [középnap]$^{-1}$ [naptömeg]$^{-1/2}$.

A Gauss-féle gravitációs állandó, mint a mozgásegyenletekben szereplő arányossági tényező, az egyik legfontosabb égi mechanikai paraméter. Fenti összefüggés szerint *k* pontossága T és m pontosságától függ. Így *k* értékét mindig újra kellene számítani, mikor T-t és m-et pontosabban megismerjük. Ez a gyakorlatban igen súlyos nehézségeket okozna. Ilyenkor ugyanis újra kellene számítani az összes mozgáselméletet, mely *k* egy korábbi értékén alapult. Azért, hogy erre ne legyen szükség, a Nemzetközi Csillagászati Unió (International Astronomical Union, rövidítve IAU) 1938-ban elhatározta: *k* értéke legyen egyszer s mindenkorra a Gauss által kiszámított érték, s helyette a Föld-Hold rendszer Nap körüli pályájának fél nagytengelye legyen változó. Ez többé tehát nem egységnyi, hanem az $a = \left(\frac{kT\sqrt{1+m}}{2\pi} \right)^{2/3}$ összefüggés alapján számítható érték.

A T-re és m-re jelenleg elfogadott értékek alapján a Föld-Hold rendszer pályájának fél nagytengelye 1,000 000 031 csillagászati egység.

Mi tehát végül is a csillagászati egység? Az 1984-ben bevezetett 1976-os IAU-konstansok rendszerének meghatározása szerint a csillagászati egység egyenlő annak a körpályának a sugarával, melyen egy elhanyagolható tömegű részecske $T = 2\pi/k$ középnap alatt tesz meg egy fordulatot a Nap gravitációs vonzásának hatására a Nap körül, ahol k = 0,017 202 098 95 a Gauss-féle gravitációs állandó.